Total number of printed pages–8

24R/23A–2025 (MAT2104M)

2025

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT2104M

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : $1\times7=7$

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) What is the n^{th} derivatives of $y = e^{ax+b}$?

$y = e^{ax+b}$ ৰ n-তম অবকলজ কি?

(b) Write down the Leibnitz's Theorem.

লেইবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(c) Define the radius of curvature of a curve.

এটা বক্ৰৰ বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) What is the value of $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ ৰ মান লিখা।

(e) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x \, dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x \, dx$ ৰ মান উলিওৱা।

(f) Write the reduction formula for

$\int x^n e^{ax} dx$.

$\int x^n e^{ax} dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো লিখা।

(g) If $\phi(x, y, z) = x^2 y + xy^2 + z^2$,

find $\Delta\phi$ at $(1, 1, 1)$.

যদি $\phi(x, y, z) = x^2 y + xy^2 + z^2$, তেন্তে $\Delta\phi$ ৰ মান $(1, 1, 1)$ ত উলিওৱা।

2. Answer the following questions : $2 \times 4 = 8$

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If (যদি) $y = x^{2n}$ then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে),

$$y_n = 2^n \{1.3.5......(2n-1)\} x^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x^2}{x^3}$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$curl\,(grad\,\phi) = 0$, where ϕ is any scalar function (য'ত ϕ এটা স্কেলাৰ ফলন হয়).

(d) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx.$$

3. Answer *(a)* and *[(b)* **or** *(c)]* and *[(d)* **or** *(e)]* of the following : 5×3=15

(a) আৰু *[(b)* অথবা *(c)]* আৰু *[(d)* অথবা *(e)]* ৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) If (যদি) $y = log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ then (তেন্তে)

prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\left(1+x^2\right)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+m^2y_n=0.$$

(b) If $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are two vector functions of a scalar variable '*t*', prove that

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}.$$

যদি $\vec{u}$ আৰ $\vec{v}$ অদিশ চলৰ *t*-ৰ ফলন হয়, প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}$.

(c) If (যদি) $\vec{r}=xi+yj+zk$ and (আৰু) $r=|\vec{r}|$ then prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$\nabla f(r)\times\vec{r}=0$, where f is any function (য'ত f এটা ফলন হয়).

(d) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$$

(e) Find the complete length of the astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ এষ্ট্ৰইদৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer **either** (a) **or** (b) of the following : 10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ (a) বা (b) ৰ উত্তৰ লিখা :

(a) (i) If (যদি) $u = \sin ax + \cos ax$

then prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$u_n = a^n \left\{1+(-1)^n \sin 2ax\right\}^{1/2}.$$ 4

(ii) If (যদি) $y=(x^2-1)^n$, show that (দেখুওৱা যে)

$$\left(x^2-1\right)y_{n+2}+2xy_{n+1}-x(n+1)y_n=0.$$ 6

(b) Find the radius of curvature at the point (r,θ) of the curve $r=a(1-\cos\theta)$ and show that it varies as $\sqrt{r}$.

$r=a(1-\cos\theta)$ ৰ (r,θ) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে ই $\sqrt{r}$ ৰ সমানুপাতিক। 7+3=10

5. Answer **either** (a) **or** (b) of the following : 10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Obtain a reduction formula for $\int tan^n x dx$.

If $I_n = \int_0^{\pi/4} tan^n x\, dx$, prove that

$(n+1)(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$.

$\int tan^n x dx$ ৰ লঘুকৰণ উপপাদ্য নিৰ্ণয় কৰা।

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} tan^n x\, dx$, প্ৰমাণ কৰা যে

$(n+1)(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$.

(b) Find the perimeter of the curve $r = a(1 + cos\theta)$ and show that arc of the upper half is bisected by $\theta = \pi/3$.

$r = a(1 + cos\theta)$ বক্ৰৰ পৰিসীমা নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে ওপৰ অংশৰ বক্ৰচাপে, $\theta = \pi/3$ ত দ্বিখণ্ডিত কৰে।

6. Answer *either* [(a) and (b)] *or* [(c) and (d)] of the following : $5\times2=10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ [(a) আৰু (b)] অথবা (c) আৰু (d)] ৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\nabla\times\left(\nabla\times\bar{F}\right)=\nabla\left(\nabla.\bar{F}\right)-\nabla^2\bar{F}.$$

(b) Find the volume and surface area of the solid generated by the cycloid

$$x=a\left(1+\sin\theta\right);\ y=a\left(1+\cos\theta\right)$$

about the base.

তলত দিয়া চাইক্লইডৰ ভূমি সাপেক্ষে আয়তন আৰু কালি নিৰ্ণয় কৰা।

$$x=a\left(1+\sin\theta\right);\ y=a\left(1+\cos\theta\right).$$

(c) Find the directional derivative of $f\left(x,y,z\right)=x^2yz+4xz^2$ at the point $(1,-2,-1)$ in the direction of the vector $2i-j-2k$.

$2i-j-2k$ ভেক্টৰৰ দিশত $(1,-2,-1)$ বিন্দুত $f\left(x,y,z\right)=x^2yz+4xz^2$ ৰ দিশগত অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Establish the reduction formula for $\int (\log x)^n \, dx$ and use it to evaluate $\int (\log x)^3 \, dx$.

$\int (\log x)^n \, dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি $\int (\log x)^3 \, dx$ ৰ মান উলিওৱা।
